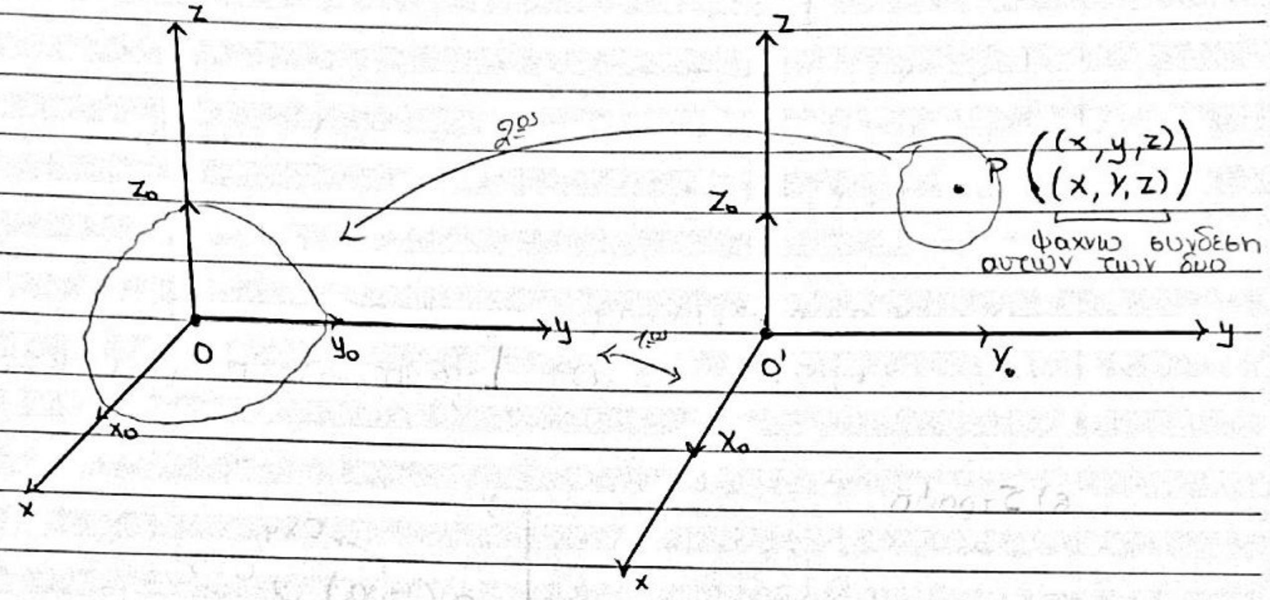
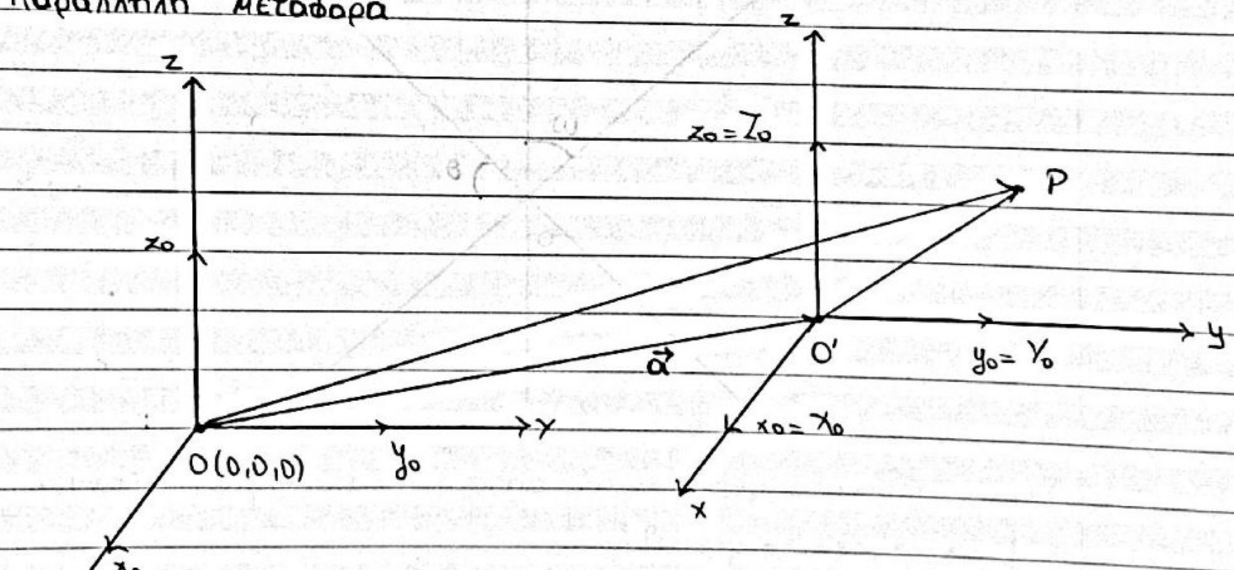
Μαθημα 18º No. Date 22/4/2016

Αναλυτικη Γεωμετρια

Γεωμετρια Μετασχηματισμων
- ειτε αλλαζω συστημα αξονων
- ειτε μεταφερω το σχημα μου



α) Παραλληλη Μεταφορα



$$O(x_0, y_0, z_0) \,/\, O'(\overset{X_0}{\overset{\shortparallel}{x_0}}, \overset{Y_0}{\overset{\shortparallel}{y_0}}, \overset{Z_0}{\overset{\shortparallel}{z_0}})$$

$\vec{OP} = \vec{OO'} + \vec{O'P}$ αν $O'(\overset{\vec{a}}{\overset{\shortparallel}{a, \beta, \gamma}}) \Rightarrow OO'(a-0, \beta-0, \gamma-0)$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = X + a \\ y = Y + \beta \\ z = Z + \gamma \end{cases} \rightarrow \vec{a}$$

Τετοια συστηματα συντεταγμενων λεγονται παραλληλα
{ Οι σχεσεις που τα συνδεουν }

π.χ

Εστω (π): $x+2y+3z-4=0$ επιπεδο ως προς $Oxyz$

μεταφερουμε το $O(0,0,0)$ στο $O'(-3,4,7)$

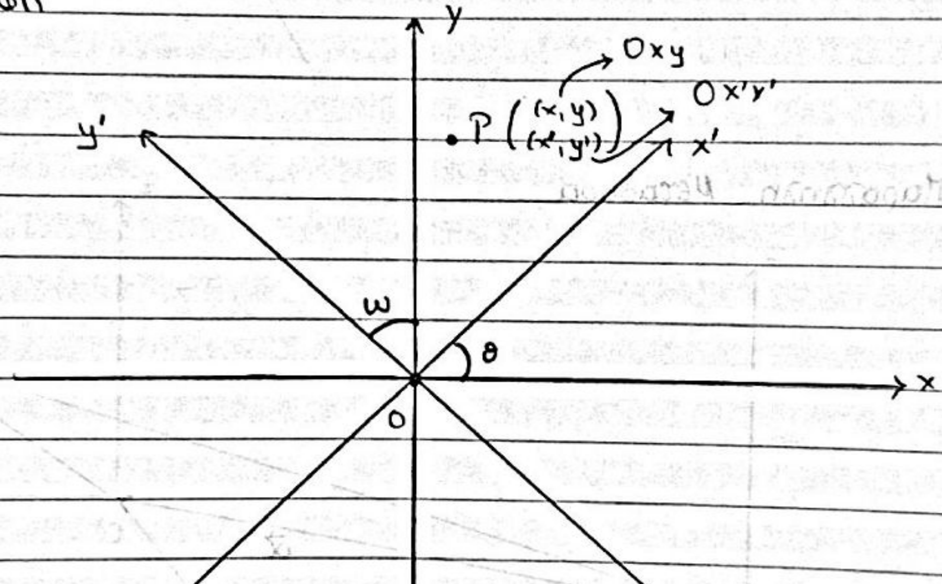
$$\Rightarrow \begin{cases} x = X+(-3) = X-3 \\ y = Y+4 = Y+4 \\ z = Z+7 = Z+7 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ το (π) γινεται:

(π): $X-3+2(Y+4)+3(Z+7)-4=0 \Rightarrow$

(π): $X+2Y+3Z+22=0$ [παραλληλα, αλλαζει μονο το Δ]

β) Στροφη



Στην ειδικη περιπτωση οπου το συστημα αξονων ορθοκανονικο

$$\begin{cases} x = x'\cdot\cos\theta - y\cdot\sin\omega \\ y = x'\sin\theta + y'\cdot\cos\omega \end{cases}$$

Στην συνηθη περιπτωση οπου $\omega=\theta$

$$\begin{cases} x = x'\cdot\cos\theta - y'\cdot\sin\theta \\ y = x'\cdot\sin\theta + y'\cdot\cos\theta \end{cases}$$

Μετασχηματισμος συντεταγμενων σε στροφη των αξονων Ox, Oy κατα γωνια θ.

π.χ $\to (0,0)$

Στο Oxy δινεται η $x^2+y^2+2x+4y=0$. Να μετατοπιστει παραλληλα το Oxy, ετσι ωστε η εξισωση της επιφανειας να μην εχει πρωτοβαθμιους ορους

$$x^2+y^2+2x+4y=0 \Rightarrow x^2+y^2+2x+1-1+4y+2^2-2^2=0 \Rightarrow$$
$$(x^2+2x+1)+(y^2+4y+2^2)-1-4=0 \Rightarrow (x+1)^2+(y+2)^2-5=0$$
$$\Rightarrow (x+1)^2+(y+2)^2=5 \quad (*)$$

Θετουμε $\begin{cases} x'=x+1 \\ y'=y+2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=x'-1 \\ y=y'-2 \end{cases}$

Αρα $(*) \Rightarrow (x')^2+(y')^2=5$

Εχουμε : Oxy με $O(0,0)$

Παιρνουμε : O'xy με $O'(-1,-2)$

$$\left[\begin{cases} x = \overset{x'}{X}+a \\ y = \overset{y'}{Y}+b \\ (z = Z+\gamma) \end{cases} \quad a=-1,\ b=-2 \right]$$

Ορισμος

Μια απεικονιση $\varphi: E \to E$ (θα μας ενδιαφερουν $\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3$) η οποια απεικονιζει σημειο $P \mapsto \varphi(P)=P'$ λεγεται γεωμετρικος μετασχηματισμος

π.χ

$\mathbb{R}^2$, $P(x,y) \xrightarrow{\varphi} P'(x',y')$

Πινακας του γεωμ. μετασχ.

Αν οι εξισωσεις που συνδεουν τις συντεταγμενες των σημειων ειναι:

$$\begin{cases} x' = a_1x+b_1y \\ y' = a_2x+b_2y \end{cases} \iff \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, \text{ οπου } A=\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{bmatrix}$$

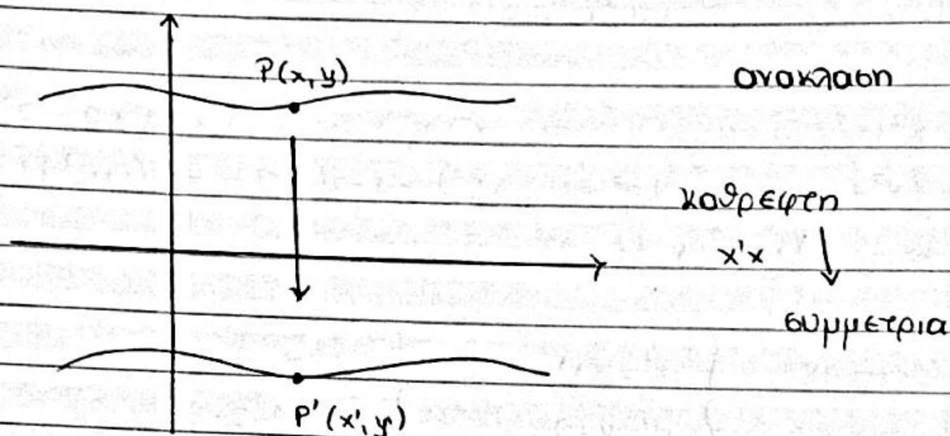
Τοτε η φ καλειται γραμμικος γεωμ. μετασχ.

No. Date

$$\left\{ \begin{array}{ll} \text{το} \quad x = x + a & \underline{\text{ΔΕΝ}} \text{ είναι γραμ.} \\ \quad\; y = y + b & \text{γεωμ. μετασχ. διότι } a, b \text{ σταθερες} \end{array} \right\}$$

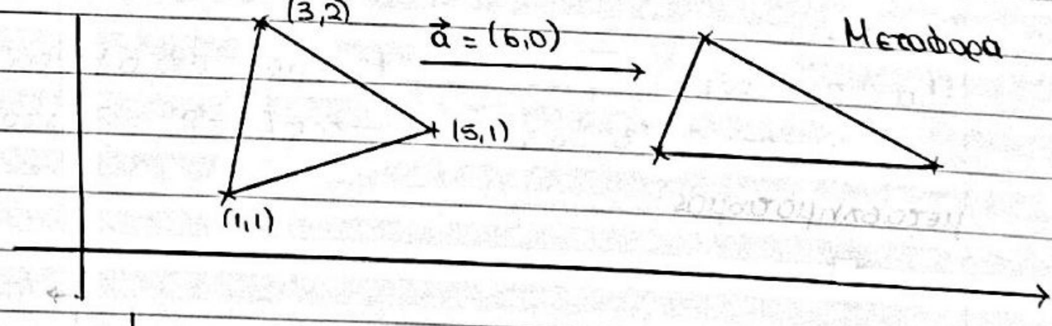
Π.χ

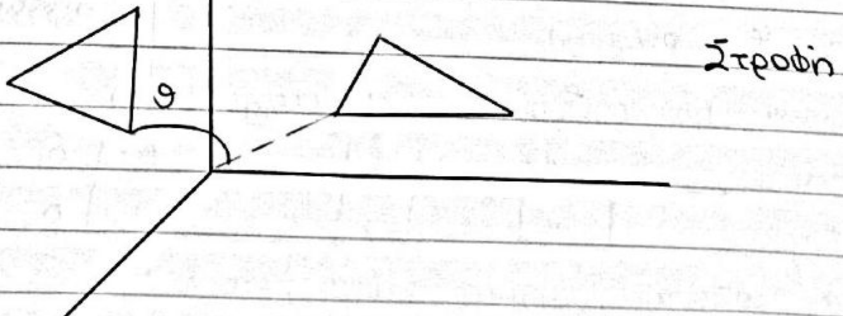
1



$$\underbrace{\begin{array}{l} x' = x \\ y' = -y \end{array}}_{\Big\downarrow \text{ γραμμικος}} \quad \Bigg| \quad \begin{array}{l} \varphi: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ \underbrace{\varphi(x,y)}_{\substack{\| \\ (x',y')}} = (x,-y) \end{array}$$

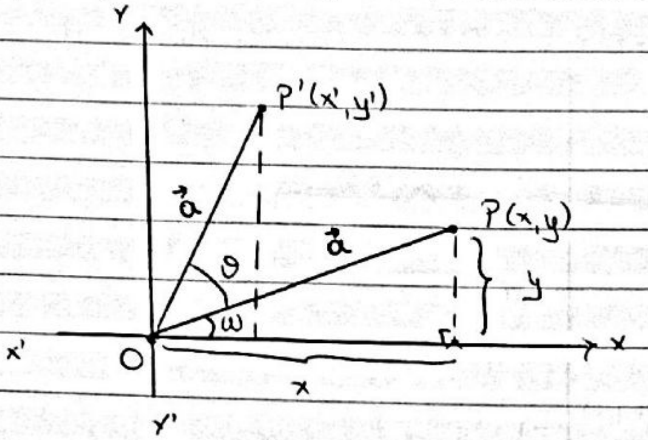
$$\begin{array}{l} x' = 1 \cdot x + 0 \cdot y \\ y' = 0 \cdot x + (-1) \cdot y \end{array} \Rightarrow \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \overset{\overset{A}{\|}}{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$





No. Date

Μετασχηματισμος της στροφης στο επιπεδο



$|\vec{OP}| = a$

$\cos\omega = \dfrac{x}{a} \Rightarrow x = a\cdot\cos\omega$

$\sin\omega = \dfrac{y}{a} \Rightarrow y = a\cdot\sin\omega$

Αντιστοιχα

$$\begin{cases} x' = a\cdot\cos(\omega+\theta) = a\cdot(\cos\omega\cdot\cos\theta - \sin\omega\cdot\sin\theta) \\ y' = a\cdot\sin(\omega+\theta) = a\cdot(\sin\omega\cdot\cos\theta + \cos\omega\cdot\sin\theta) \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x' = \overset{x}{\boxed{a\cdot\cos\omega}}\cos\theta - \overset{y}{\boxed{a\cdot\sin\omega}}\sin\theta \\ y' = \underset{y}{\boxed{a\cdot\sin\omega}}\cos\theta + \underset{x}{\boxed{a\cdot\cos\omega}}\sin\theta \end{cases} \Rightarrow$$

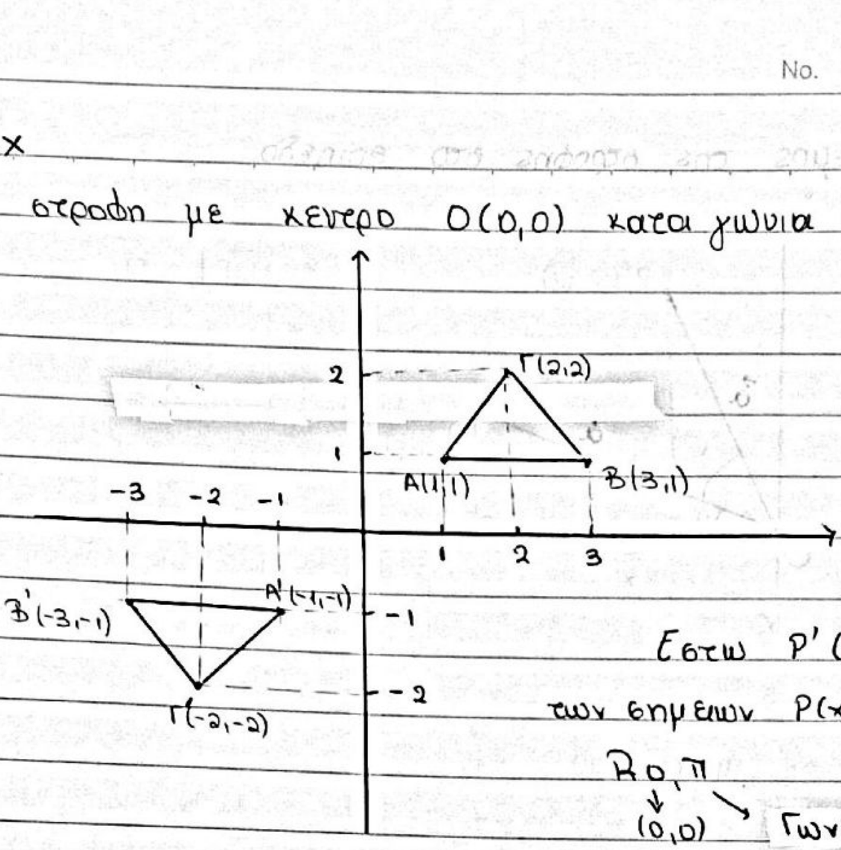
$$\begin{cases} x' = x\cdot\cos\theta - y\cdot\sin\theta \\ y' = x\cdot\sin\theta + y\cdot\cos\theta \end{cases} \Rightarrow \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = A\cdot\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

οπου $A = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$

στροφη = γραμμικος

π.χ

Η στροφη με κεντρο $O(0,0)$ κατα γωνια π



Εστω $P'(x',y')$ οι εικονες των σημειων $P(x,y)$ μεσω στροφης

$R_{O,\pi}$ ↓ $(0,0)$ ↘ Γωνια

Γνωριζουμε οτι

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\pi & -\sin\pi \\ \sin\pi & \cos\pi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \Rightarrow$$

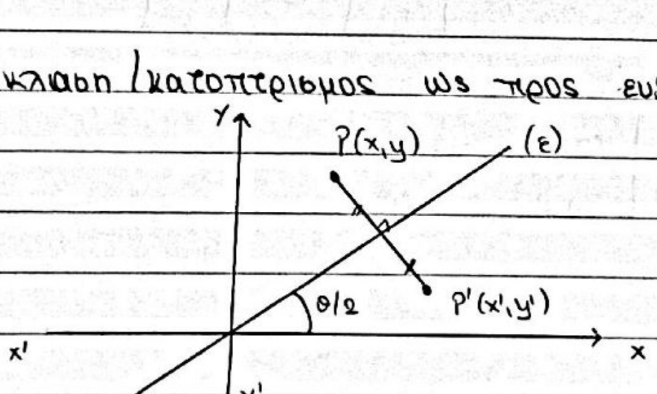
$$\begin{cases} x' = -x \\ y' = -y \end{cases}$$

Αρα $A(1,1) \xrightarrow{\varphi} A'(-1,-1)$

$B(3,1) \xrightarrow{\varphi} B'(-3,-1)$

Συμμετρια ως προς O $\quad \Gamma(2,2) \xrightarrow{\varphi} \Gamma'(-2,-2)$

Ανακλαση / κατοπτρισμος ως προς ευθεια (ε)

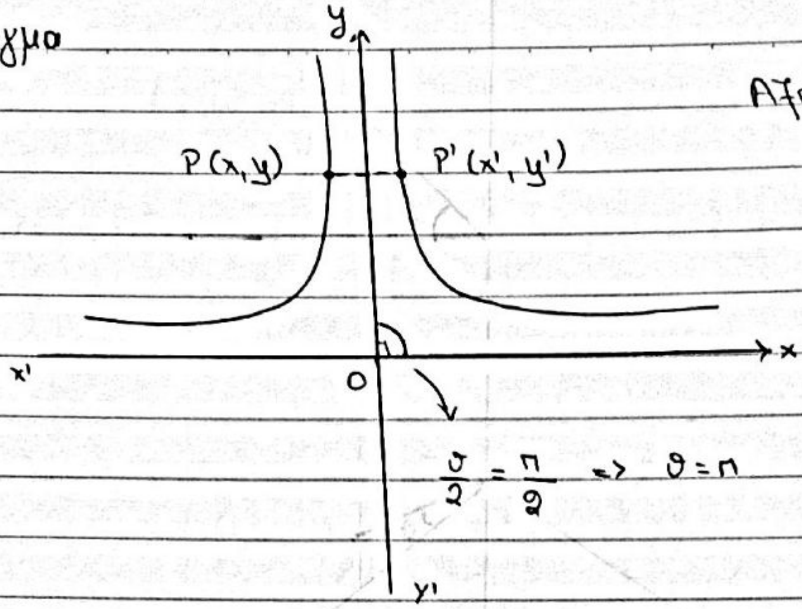


Εστω θ/2 η γωνια που σχηματιζει η (ε) με τον Ox

Οι αναλυτικες εξισωσεις των σημειων $P'(x',y')$ (των εικονων των $P(x,y)$) ως προς ανακλαση (ως προς (ε)) ειναι:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Παραδειγμα



Αξονας ανακλασης:
(ε): yy'

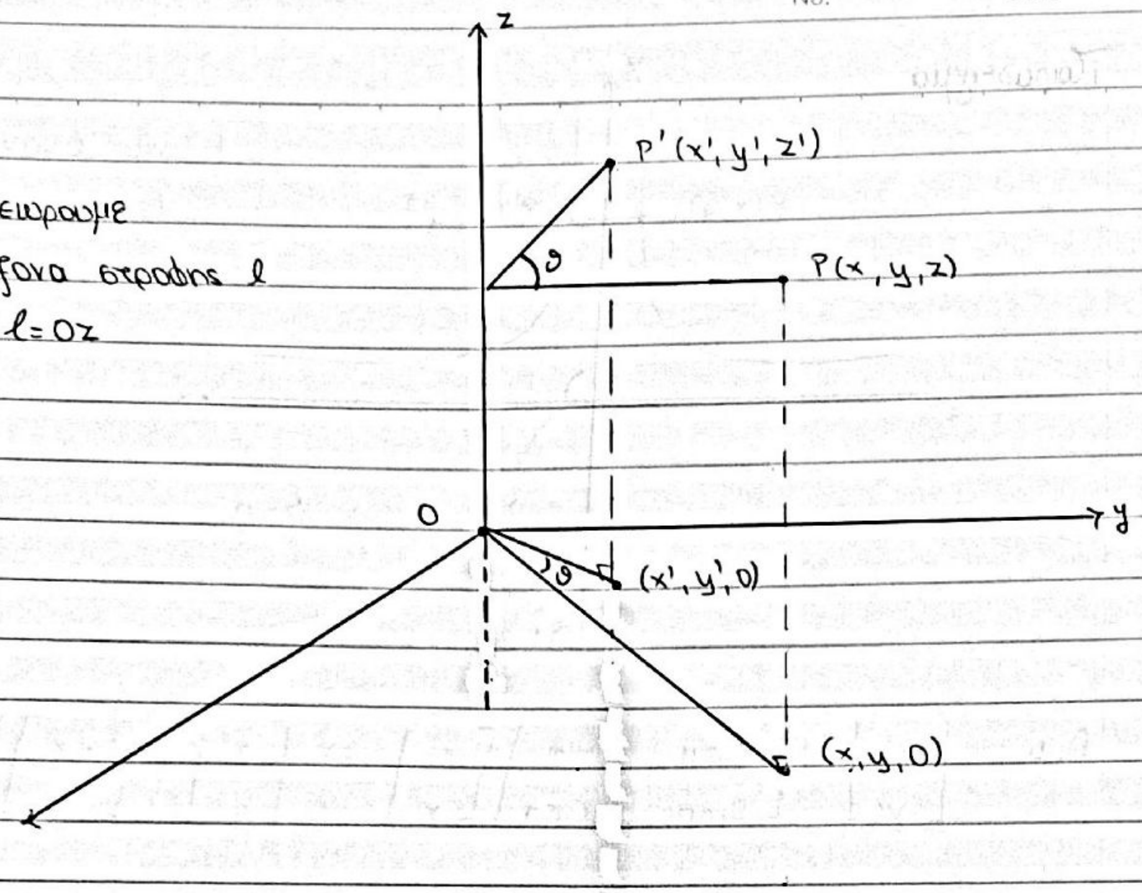
Αρα $\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\pi & \sin\pi \\ \sin\pi & -\cos\pi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x \\ y \end{bmatrix} \Rightarrow$

$\Rightarrow \varphi(x,y) = (-x, y) = (x', y')$

$\boxed{\Longrightarrow}$ $\mathbb{R}^3$: γραμμικος μετασχηματισμος $\varphi: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ ειναι η απεικονιση με αναλυτικες εξισωσεις

$$\begin{cases} x' = a_1 x + \beta_1 y + \gamma_1 z \\ y' = a_2 x + \beta_2 y + \gamma_2 z \\ z' = a_3 x + \beta_3 y + \gamma_3 z \end{cases} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ a_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ a_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

Θεωρουμε
αξονα στροφης ℓ
$\ell = Oz$

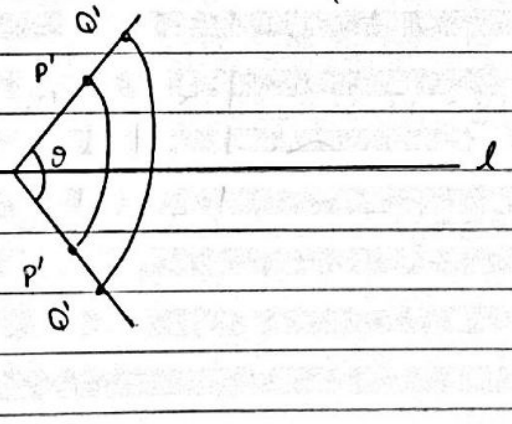


Εστω ℓ ευθεια στο $\mathbb{R}^3$

Θεωρω τον γεωμετρικο μετασχηματισμο

$$\begin{array}{l} \varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \\ P \longmapsto \varphi(P) = P' \end{array} \quad \left\{ \begin{array}{c} \text{στροφη του } P \text{ γυρω απο τον αξονα } \ell \\ \text{κατα γωνια } \theta \end{array} \right\}$$

Τα σημεια της ℓ ειναι σταθερα



Αν ειμαστε Oxyz (ορθοκανονικο) με $O \in \ell$ (αξονας $Oz \to \ell$)

$\Rightarrow$ οι συντεταγμενες των P, P' συνδεονται

$$\begin{cases} x' = x \cdot \cos\theta - y \cdot \sin\theta \\ y' = x \cdot \sin\theta + y \cdot \cos\theta \\ z' = z \end{cases} \Rightarrow \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

- Αν είχαμε σταθερο τον Ox

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$